تمرين [1]: برهن أن الشبكة ليست مودولية

الحل:

الشبكة المودولية
شرطها: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$
نأخذ $b \vee (c \wedge d) \overset{?}{=} (b \vee c) \wedge d$ حيث $b \leq d$

$l_1: \ b \vee (c \wedge d) = b \vee a = b$
$l_2: \ (b \vee c) \wedge d = e \wedge d = d$
$l_1 \neq l_2$
ومنه الشبكة ليست مودولية

تمرين [2]: هل الشبكة المعرفة بمجموعة قواسم 30 والمرتبة جزئيا بعلاقة القسمة هي شبكة توزيعية أو مودولية؟؟

الحل:

$2 \wedge (3 \vee 5) \overset{?}{=} (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5)$
$l_1: \ 2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \wedge 10 = 2$
$l_2: \ (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1 \vee 1 = 1$
$\Rightarrow 2 \neq 1 \Rightarrow l_1 \neq l_2$
ومنه ليست توزيعية

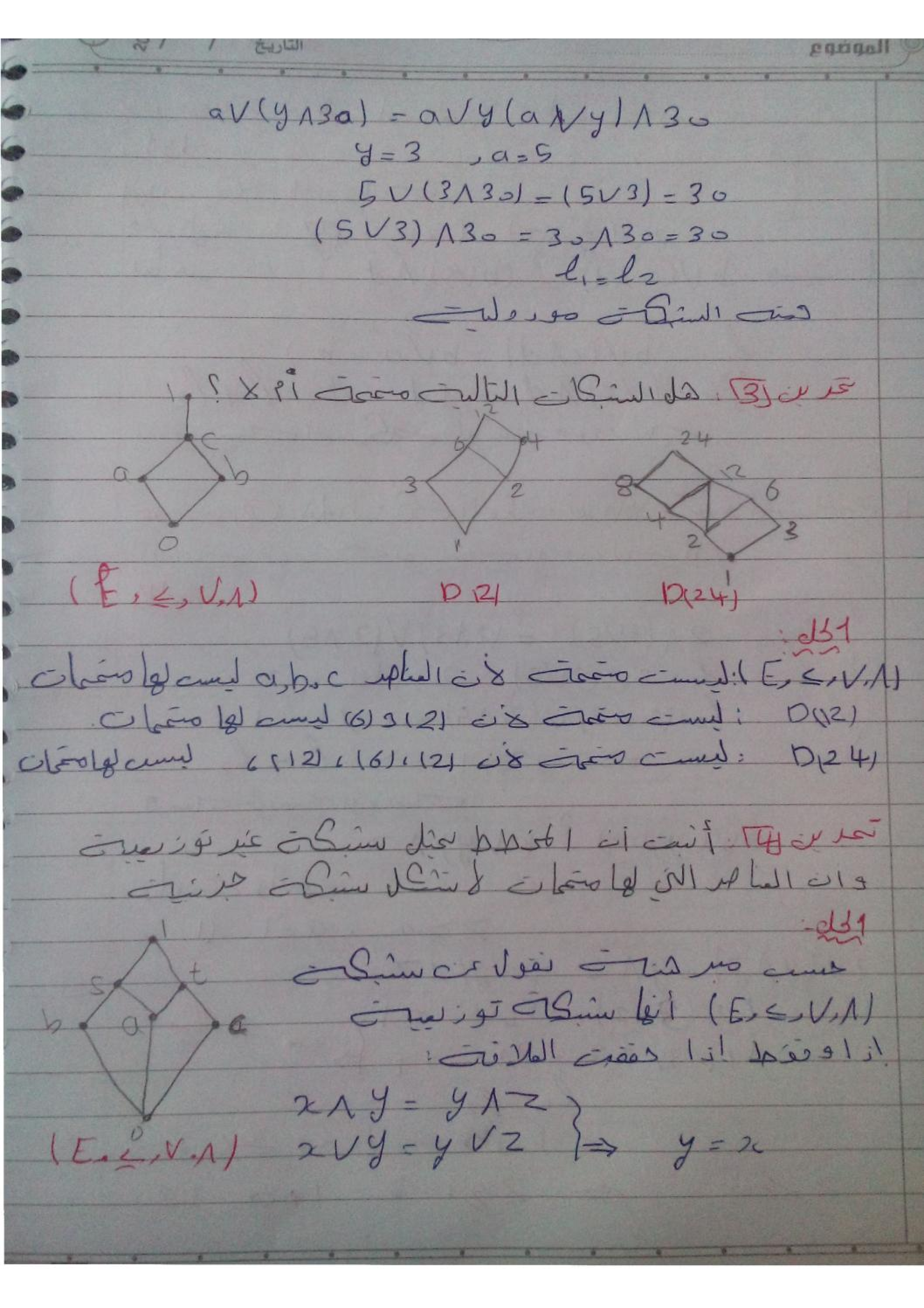
$a \vee (y \wedge z) \overset{?}{=} (a \vee y) \wedge z$
نناقش حالتين:

1) $a = 1$ ، $z \geq a$

$1 \vee (y \wedge z) = y \wedge z = (1 \vee y) \wedge z$

مثال
$1 \vee (3 \wedge 2) = 1 \vee 1 = 1$
$(1 \vee 3) \wedge 2 = 3 \wedge 2 = 1$
$\Rightarrow l_1 = l_2$
ومنه في الحالة مودولية

2) $1 \neq a$ ، $z \geq 1 \Leftarrow z = 30$



$$a \vee (y \wedge 30) = a \vee y (a \wedge y) \wedge 30$$

$$y = 3 \quad , a = 5$$

$$5 \vee (3 \wedge 30) = (5 \vee 3) = 30$$

$$(5 \vee 3) \wedge 30 = 30 \wedge 30 = 30$$

$$l_1 = l_2$$

منه الشبكة مودولية

تمرين (3): هل الشبكات التالية متممة أم لا ؟

الحل:

$(E, \leq, \vee, \wedge)$: ليست متممة لأن العناصر a, b, c ليس لها متممات

$D(12)$: ليست متممة لأن (2) و (6) ليس لها متممات.

$D(24)$: ليست متممة لأن (2)، (6)، (12)، ليس لها متممات

تمرين (4): أثبت أن المخطط يمثل شبكة غير توزيعية وان العناصر التي لها متممات لا تشكل شبكة جزئية

الحل:

حسب مبرهنة نقول عن شبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ أنها شبكة توزيعية اذا وفقط اذا حققت العلاقة:

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge y = y \wedge z \\ x \vee y = y \vee z \end{array}\right\} \Rightarrow y = x$$

التاريخ / / 20 — الموضوع

$b \vee c = 1 \quad , b \vee t = 1$
$b \wedge c = 0 \quad b \wedge t = 0 \Rightarrow t \neq c$

ومنه الشبكة ليست توزيعية

- إن شبكة المتممات: $\{0, 1, b, c, s, t\}$

ليست شبكة جزئية لأن: $s \wedge t = a$

و a لاينتمي إلى هذه المجموعة

* تعريف:

ليكن f تطبيقاً من الشبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ نسمي f مغلاقاً على المجموعة $(E, \leq)$ إذا تحققت الشروط الآتية:

1. $\forall x \in E \; ; \; x \leq f(x)$
2. $\forall x, y \in E \; ;$
3. $f \circ f = f$

تذكرة:

1) تعريف: ليكن X فضاء متري و $A \subset X$ و $x \in X$ نسمي x لصاقة المجموعة A إذا كان أي جوار للنقطة x يتقاطع مع A أي من أجل أي جوار V للنقطة x فإنه يتحقق:

$$V \cap A \neq \emptyset$$

مثال: الفضاء المتري الحقيقي $\mathbb{R}$ المجموعة $A = [1, 2] \cup \{3\}$

إن $\{3\}$ لاصقة لأن أي جوار يتقاطع مع A بالعدد $\{3\}$

مبرهنة: من أجل أي مجموعة جزئية A من فضاء متري X يتحقق الآتي

1- لصاقة A تساوي تقاطع جميع المجموعات التي تحوي A

2- لصاقة A هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A

3- تكون A مغلقة إذا وفقط إذا كانت تساوي لصاقتها.

التاريخ / / 201

الموضوع

تمرين [5]: ليكن $\mathcal{T}$ طبولوجيا على المجموعة غير الخالية E
وليكن F تابعا من الشبكة $(P(E), \cup, \cap, \subseteq)$ في نفسها معرفة
بالشكل: $F(M) = \bar{M}$ حيث $\bar{M}$ هي لصاقة M في الفضاء الطبولوجي
$(E, \mathcal{T})$

1) أثبت أن F مغلاق على الشبكة $P(E)$
2) أثبت أن F مورفيزم ترتيبي وليس مورفيزم شبكي ترتيبي

الحل:

1)

$$1)\quad M \subseteq \bar{M}$$

$$2)\quad M \subseteq N \Rightarrow \bar{M} \subseteq \bar{N}$$

$$3)\quad \overline{(\bar{M})} = M$$

ومنه F مغلاق

2)

$$F(A \cap B) \overset{?}{=} f(A) \cap f(B)$$

$$l_1 = f(A \cap B) = \overline{A \cap B}$$

$$l_2 = f(A) \cap f(B) = \bar{A} \cap \bar{B}$$

ولكن

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

ومنه F مورفيزم ترتيبي في الحالة العامة